

# AL-KHWĀRIZMĪ

## Vie, œuvre et livre algébrique

Par Nicolas Farès

(1-12-2017)

Équipe d'Études et de Recherches sur la Tradition Scientifique Arabe  
Société Libanaise d'Histoire des Sciences Arabes

La présente étude est extraite du chapitre I du livre de l'auteur intitulé : *Naissance et développement de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe*, Dār al-Fārābī, 20017, Beyrouth.

### 1. Aperçu de la vie et des travaux d'al-Khwārizmī.

#### 1. 1. Son nom.

Rares sont les livres d'histoire des mathématiques qui n'évoquent pas le nom d'al-Khwārizmī comme étant un des grands scientifiques que l'humanité ait connus. Ce savant tient surtout sa renommée à l'association de son nom aux mots "algèbre"<sup>1</sup> et "algorithme"<sup>2</sup> et au fait que, grâce à son (ou à ses deux) livre(s) arithmétique(s), le système de numération décimal (positionnel) a été

---

<sup>1</sup> Ce mot, dont l'origine est le mot arabe "*al-jabr*", a été introduit dans le dictionnaire mathématique au IX<sup>e</sup> siècle, par al-Khwārizmī, dans son "*Livre d'al-jabr et d'al-muqābala*". Depuis, il désigne cette discipline. Au cours du livre, al-Khwārizmī indique par ce mot une opération algébrique. Voir les notes du § 2.2, g), plus bas.

<sup>2</sup> Une des plus anciennes versions latines du livre (ou des deux livres) arithmétique(s) d'al-Khwārizmī, ne porte pas de titre et on ne connaît pas son traducteur. Elle commence par cette expression : "*Dixit Algorismi*", que les historiens ont prise pour le titre d'un livre latin. A partir du XII<sup>e</sup> siècle, les scientifiques de l'Occident considéraient le mot *Algorismi* comme désignant la matière scientifique contenue dans ce livre : le calcul et les opérations arithmétiques dans le système positionnel de numération à base de 10. Partant de cela, ils donnaient à leurs livres dans ce domaine de l'arithmétique, des titres dérivant de ce mot, tels que *Liber Algorismos*, *Livre d'algorisme*, ... Certains avaient cru que le mot *Algorismi* est un assemblage de deux mots grecs. Cette incertitude persistait jusqu'au IX<sup>e</sup> siècle (1845), quand J. Toussaint Reinaud, (1795-1867) a prouvé que l'expression "*Dixit Algorismi*" signifie "al-Khwārizmī a dit" et que le mot *Algorismi* n'est qu'une latinisation du nom de l'auteur de la version originale, arabe, du Livre.

introduit en Europe latine<sup>3</sup>. En plus de ses travaux en algèbre et en arithmétique, al-Khwārizmī a écrit en astronomie (tables astronomiques -ou *zījs*- et astrolabes<sup>4</sup>), en géographie, et en chronologie (cadrans solaires).

Les historiens<sup>5</sup> reconnaissent le fait que les informations concernant la vie d'al-Khwārizmī sont rares. Ils s'accordent aussi sur son nom : Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī. Ce surnom indique qu'il est originaire de Khwārizm, ancienne province orientale de l'Iran. Il est né avant l'année 800 de notre ère et on ne connaît pas le lieu de sa naissance. Il a vécu au début du règne des Abbassides, et réalisé la plupart de ses activités scientifiques à Bagdad, pendant le règne du calife al-Ma'mūn (813-833) ; il a survécu au calife al-Wāthiq (mort en 847). Certains historiens ont cru, en se référant à un passage (unique) du livre "*Histoire des nations et des rois*"<sup>6</sup> d'al-Ṭabarī, qu'il est zoroastrien. Dans ce passage, le nom du savant se trouve cité parmi d'autres noms: "... et Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī al-Majūsī al-Quṭurbulī, et ...". L'attribut "*al-majūsī*" se dit d'une personne descendante des mages (prêtres de la religion zoroastrienne). Mais Adel Anbouba a attiré l'attention sur l'imprécision d'une telle conclusion [Anbouba, 1978, p. 66] et conjecturé que la conjonction "et" qui sépare les noms d'al-Khwārizmī et d'al-Majūsī al-Quṭurbulī<sup>7</sup> est tombée, par une erreur du copiste du livre d'al-Ṭabarī, ce qui a fait que ces deux noms apparaissent comme désignant une seule personne. Plus tard, R. Rashed adopte cette même conjecture dans ses deux livres : [Rashed, 1984 (1), p. 17 et, 2007, p. 5]. Récemment, A. Issa, de « l'Équipe d'étude et de recherche sur la tradition scientifique

---

<sup>3</sup> La traduction de ce(s) livre(s) en latin a été faite, probablement, au 12<sup>e</sup> siècle (voir le paragraphe 1.3, plus bas).

<sup>4</sup> Appareil astronomique portable d'origine grecque et à usages divers en astronomie, chronologie et géographie, développé dans la tradition arabe.

<sup>5</sup> Voir les références sur lesquelles nous nous basons dans la rédaction de ce paragraphe : [Toomer, 2008], [Anbouba, 1978], [Youschkévitch, 1976] et [Rashed, 2007].

<sup>6</sup> Voir la bibliographie [al-Ṭabarī, p. 1890].

<sup>7</sup> Quṭurbulī se dit d'une personne originaire de la ville de Quṭurbul (tout près de Bagdad).

*arabe* » a montré (dans une note sur le sujet, non encore publiée) que le qualificatif « al-Majūsī » renvoie à un lieu géographique<sup>8</sup> plutôt qu'à une religion ; il est donc probable que le fragment susmentionné d'al-Ṭabarī soit correct.

### **1. 2. Le climat social dans lequel il a vécu.**

Après le passage de pouvoir des Omeyyades aux Abbassides (survenu vers l'année 750), la capitale de l'État arabe passait de Damas à la ville de Bagdad, construite par le calife al-Mansour (754-775) entre les années 758 et 765. Depuis sa construction, Bagdad n'était pas seulement la capitale politique et celle du luxe, mais aussi celle de la science. Harūn al-Rashīd (786-809) y avait construit une grande bibliothèque, riche en manuscrits dont une partie provenait de Byzance. Plus tard, sous le règne de son fils al-Ma'mūn, Bagdad comptait des dizaines de bibliothèques publiques, un nombre considérable de librairies, de scribes qui copiaient des ouvrages dans tous les domaines du savoir, et d'artisans qui fabriquaient des instruments astronomiques. L'institution la plus importante qui a prospéré à l'époque d'al-Ma'mūn était "*la Maison de la sagesse*" (*Bayt al-Ḥikma*) ; c'était une sorte d'académie d'études supérieures (comprenant une bibliothèque et un observatoire) ; elle avait attiré vers elle des savants, dans des spécialités diverses, venant des quatre coins de l'empire arabe ; cet empire s'étendait alors de l'Espagne jusqu'en Chine, en passant par l'Afrique du Nord et l'Égypte. Dans cette ambiance, al-Khwārizmī avait vécu et travaillé. Il était, d'après les témoignages des historiens et de ses contemporains, une des figures les plus éminentes de *Bayt al-Ḥikma*, où il faisait ses études et ses recherches. De plus, il était parmi les scientifiques à avoir travaillé dans l'observatoire astronomique "*al-Chammāssiya*" construit par al-Ma'mūn, à Bagdad.

### **1. 3. Ses œuvres.**

Pour recenser les œuvres d'al-Khwārizmī, les historiens se sont référés aux livres des anciens bio-bibliographes et aux passages évoquant ses travaux dans les écrits de ses contemporains et ses

---

<sup>8</sup> "*Le chemin des Mages*" désignait une rue ou une banlieue de Bagdad.

successeurs. Dans le *Fihrist* d’Ibn al-Nadīm (mort vers 380 H # 990), on lit : “*Les gens se basaient sur ses deux zījs, le premier et le second, connus sous le nom de Sindhind. Parmi les livres qu’il a écrits, il y a : le livre du zīj, en deux versions, le livre sur le cadran solaire (al-Rukhāma : la planche en marbre), le livre de l’utilisation de l’astrolabe, le livre de la construction de l’astrolabe, et le livre d’histoire*” [al-Nadīm, p. 333]. Nous retrouvons le même passage chez al Qiftī (568-646 H # 1172-1248) [al-Qiftī, p. 286]. Ibn al-Nadīm attribue à Sanad Ibn ‘Alī, (contemporain d’al-Khwārizmī) : “*le livre du calcul indien*”, “*le livre de l’addition et de la soustraction*” et “*le livre d’al-jabr et d’al-Muqābala*” [al-Nadīm, p. 334], mais les historiens s’accordent sur le fait que cette information est erronée et que ces trois livres reviennent à al-Khwārizmī; ils jugent qu’il s’agit d’une erreur du copiste du livre d’Ibn al-Nadīm, justifiable par l’adjacence des rubriques concernant ces deux savants.

Voici une liste des livres dont l’existence et l’appartenance à al-Khwārizmī sont attestées:

1- *Le Livre d’algèbre et d’al-Muqābala (kitāb al-jabr wa al-Muqābala)*<sup>9</sup>. Ce livre a survécu dans plusieurs manuscrits. Nous en parlerons d’une façon plus détaillée dans le paragraphe suivant.

2- *Le livre du calcul indien (kitāb al-ḥisāb al-hindī)*. Il est toujours perdu dans sa version arabe (originale). Il existe en plusieurs versions latines. Traduit en latin probablement au 12<sup>e</sup> siècle sous le titre *De numero Indorum*, on ne connaît ni l’auteur ni le lieu de cette traduction, elle aussi perdue. Mais plusieurs versions du livre d’al-

---

<sup>9</sup> Le livre n’a, explicitement, pas de titre. Anbouba pense que ce fait est dû à une pratique courante de l’époque [Anbouba, 1978, p. 68]. Rashed prouve que le titre du livre est “*kitāb al-jabr wa al-muqābala*” (le livre *d’al-jabr* et *d’al-muqābala*) et non “*al-kitāb al- mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa al-muqābala*” (le livre *concis dans le calcul d’al-jabr et d’al-muqābala*) [Rashed, 2007]; une telle mise à jour est importante car, l’adjectif “concis” qualifiant le livre dans le titre de F. Rosen, pourrait laisser supposer l’existence d’une version non concise de cette algèbre, antérieure à celle d’al-Khwārizmī, ce qui risque de faire perdre de vue la période du commencement de l’algèbre et d’embrouiller davantage la question des origines de cette science.; voir le § 4. 2, plus bas.

Khwārizmī faites à partir de cette traduction existent de nos jours, et sont connues sous le titre *Algorismes Latins*. Dans ce livre, al-Khwārizmī décrit les chiffres du système décimal, l'écriture d'un nombre quelconque et les méthodes d'effectuer les opérations arithmétiques principales dans ce système.

3- *Le livre de l'addition et de la soustraction* (*kitāb al-jam' wa al-tafrīq*) ; à ce titre on ajoute parfois l'expression : *fī hisāb al Hind*, qui signifie : *dans le calcul de l'Inde*. Ce livre est perdu, aussi, dans sa version arabe (originale). Il a été traduit en latin sous le titre : *Liber augmenti et diminutionis*, (où le mot soustraction est traduit par diminution)<sup>10</sup>. Le chercheur André Allard présente une étude exhaustive des premières versions latines de l'arithmétique arabe. Cette étude laisse entendre que les deux livres d'al-Khwārizmī que nous venons de citer, constituaient la source principale de ces versions [Allard, 1997]. C'est à partir de la traduction latine de ces deux livres que l'Occident a fait la connaissance du système décimal et de ses chiffres d'origine indienne.

4- *Le zīj du SindHind*<sup>11</sup> (*zīj as-SindHind*). Al-Khwārizmī a écrit ce livre (en astronomie) sous le règne d'al Ma'mūn. Le texte arabe de ce livre est toujours perdu. Mais, d'après Régis Morelon [Morelon, 1997, pp. 35-36], il nous est parvenu totalement, dans une traduction latine faite au 12<sup>e</sup> siècle par Adelard de Bath. Ce dernier s'est basé, pour réaliser cette traduction, sur une révision du Livre d'al-Khwārizmī, faite par Abū al-Qāsim Maslama al-Majrīṭī<sup>12</sup> (mort en Andalousie vers 398H # 1007). R. Morelon n'évoque pas l'existence d'un deuxième ouvrage en astronomie. G. J. Toomer pense que les deux ouvrages

---

<sup>10</sup> Dans [Rashed, 2007, pp. 8-9], on trouve un résumé du contenu des deux livres arithmétiques d'al-Khwārizmī.

<sup>11</sup> A ne pas confondre avec le livre intitulé "*le grand SindHind*", qui est une traduction, faite par Muhammad ibn Ibrāhīm al Fazārī (m. 180H#796), d'un ouvrage indien (tables astronomiques), avant l'époque d'al Ma'mūn. Le *zīj* d'al-Khwārizmī est une révision du *Grand SindHind*, prenant en considération le changement du lieu et celle de l'époque.

<sup>12</sup> Le surnom *al-Majrīṭī* est un mot arabe ancien qui signifie : un originaire de la ville de Madrid .

d'al-Khwārizmī en astronomie (cités plus haut par Ibn al Nadīm), ont été intégrés dans la révision d'al-Majrītī, traduite en latin<sup>13</sup>.

5- **Le livre de la figure de la terre** (*kitāb Ṣūrat al Arḍ*). C'est un livre en géographie mathématique qui a survécu dans un manuscrit qui a été édité à Leipzig en 1926.<sup>14</sup> Dans ce livre, al-Khwārizmī détermine la position de plusieurs pays et villes sur le globe terrestre, utilisant leurs coordonnées géographiques (longitude et latitude). On y trouve une carte représentant la partie habitée de la terre avec les mers. Les historiens pensent que cette carte est une version révisée et améliorée de celle qui avait été commandée par al-Ma'mūn, à un groupe de scientifiques de la maison de sagesse. Ceux-là s'étaient basés pour la réaliser, sur le livre géographique de Ptolémée (2<sup>e</sup> siècle) ; ils ont dessiné une carte de la terre, jugée plus précise que celle de Ptolémée ; mais aucune copie de leur livre n'est parvenue à nos jours.

6- **le Livre de l'extraction du datage des juifs** (*Kitāb istikhrāj ta'rīkh al yahūd*). Il est parvenu complet jusqu'à nos jours. C'est un traité dans lequel al-Khwārizmī présente une description du calendrier juif. Il a été édité et publié récemment à Beyrouth<sup>15</sup>.

---

<sup>13</sup> La révision d'al- Majrītī est éditée dans les références suivantes :

- O. Neugebauer, *The astronomical tables of al-Khwārizmī* [Texte imprimé] : translation with commentaries of the Latin version edited by H. Suter, supplemented by Corpus Christi College MS 283 / by O. Neugebauer / København: I kommission hos E. Munksgaard , 1962 ; Heinrich Suter,

- *Ziğ Muḥammad ibn Mūsā al-Ḥwārizmī = Die @astronomischen Tafeln : / des Muḥammed ibn Mūsā al-Khwārizmī ; hrsg. und komment. von Heinrich Suter / Frankfurt am Main : Institute for the history of Arabic-Islamic Science , 1997,*

- Millas Vendrell, Eduardo 1963. *El Comentario de Ibn al-Muthanna a las tablas astronomicas de al-Kwarizmi : estudio y edicion critica del texto latino, en la version de Hugo Islamic Science*. Leiden : Brill/London : Al-Furqan Islamic Heritage Foundation.

<sup>14</sup> Voir [E. S. Kennedy, 1997] qui renvoie à: *Das Kitāb Ṣūrat al-Arḍ des Abū Ga'far Muḥammad Ibn Mūsā al Huwārizmī*, éd. Hans Von Mžik. Bibliothek arabischer historikerund geographen; 3 Bd (Leipzig: Otto Harrassowitz 1926).

<sup>15</sup> Maison d'édition Byblion, Beyrouth, 2012:

"كتاب الجبر والمقابلة"، تأليف محمد بن موسى الخوارزمي، تحقيق وترجمة علي مصطفى مشرفة ومحمد مرسي احمد، ويليه للمؤلف "رسالة في استخراج تأريخ اليهود"، تحقيق ودراسة المستشرق البارون كارا دوفو. دار ومكتبة بيبليون (Byblion)، لبنان، ٢٠٠٨. راجع

7- **le Livre sur la construction de l'astrolabe** (*Kitāb 'amal al-asturlāb*). Il semble que ce livre est perdu. Le deuxième livre d'al-Khwārizmī concernant cet appareil astronomique: "**le Livre sur l'utilisation de l'astrolabe**" (*Kitāb al-'amal bi al-asturlāb*) a survécu, au moins en partie, dans un fragment d'un livre écrit par le mathématicien et astronome al-Faraghānī (m. 247H # 861) dans le même domaine ; ce dernier livre se trouve dans un manuscrit à Berlin [Toomer, 2008] et dans un autre à Istanbul (Aya Sofia). Il a été édité en 2004 par François Charette et Petra G. Schmidl.<sup>16</sup>

8- **le Livre d'histoire** (*Kitāb at-tārīkh*). Ce livre n'est pas parvenu jusqu'à nos jours. Son existence est attestée par le fait qu'il a été cité par un certain nombre de contemporains et de successeurs d'al-Khwārizmī.

9- **le Livre du cadran solaire** (*Kitāb ar-rukhāma*). On ne connaît de ce livre que son titre. Ce titre indique que le sujet du livre est la chronologie (et qu'il traite, probablement, de la construction des cadrans solaires dans un lieu donné, et de leur utilisation).

## 2. Le livre algébrique d'al-Khwārizmī.

Rares sont les livres en histoire des mathématiques qui ne consacrent pas, au moins un de leurs paragraphes, à l'algèbre d'al-Khwārizmī. La deuxième moitié du XX<sup>e</sup> siècle a connu des dizaines de colloques internationaux consacrés à la discussion de cette algèbre et de nombreux écrits ont été publiés autour de ce sujet. Ces écrits ont considérablement éclairé la question du "commencement de l'algèbre". Dans ce qui suit, nous allons rassembler et ordonner certaines informations que nous avons collectées dans ces écrits, en vue de donner un aperçu rapide des éditions du livre algébrique d'al-Khwārizmī et de son contenu théorique. Nous ne prétendons donc pas

---

أيضاً: "مقالة في استخراج تاريخ اليهود و أعيادهم"، تأليف أبي جعفر محمد ابن موسى الخوارزمي، الطبعة ١. حيدرآباد الدكن : مطبعة جمعية دائرة المعارف العثمانية، ١٩٤٧.

<sup>16</sup> François Charette and Petra G. Schmidl, "Al-Khwārizmī and Practical Astronomy in Ninth Century Baghdad", *SCIAMVS – Sources and Commentaries in Exact Sciences*, No.5, 2004, pp. 101-198.

donner des résultats spectaculaires sur ce sujet, bien que le lecteur y trouve certaines remarques non évidentes. Pour plus de détails, sur le rôle du livre d'al-Khwārizmī dans le commencement et la fondation de l'algèbre on pourra consulter [Farès, N. 2015 et 2017].

### 2. 1. Éditions récentes du livre.

Le livre d'al-Khwārizmī est connu dans les milieux scientifiques, depuis 1830, grâce à Frédéric Rosen qui l'a étudié, commenté et en a présenté une édition avec sa traduction en anglais [Rosen, 1830]. Plus tard, en 1937, 'Alī Mustapha Musharrafah a réalisé un travail analogue à celui de Rosen, en langue arabe [Musharrafah, 1937], en présentant une autre édition<sup>17</sup>. Ces deux éditions sont pourtant non critiques et elles sont faites à partir d'un seul et même manuscrit : celui d'Oxford<sup>18</sup>. Parmi plusieurs autres études qui ont succédé aux études précédentes, accompagnées souvent de fragments du même manuscrit, on doit citer surtout celle d'A. Anbouba faisant partie de son article riche en renseignements historiques: "*L'algèbre arabe aux IX<sup>e</sup> et X<sup>e</sup> siècles – Aperçu général*" [Anbouba, 1978]<sup>19</sup>, et celle de R. Rashed occupant le premier chapitre de son *Entre arithmétique et algèbre* [Rashed, 1984 (1)].

En 2007, l'historien et philosophe des sciences R. Rashed a publié, en français, un livre intitulé *Al-Khwārizmī – Le commencement de l'algèbre*. L'auteur y présente une édition critique du texte du livre d'al-Khwārizmī, se basant sur cinq manuscrits supplémentaires<sup>20</sup> et sur la traduction faite par Gérard de Crémone (1114-1187), jugée comme étant la meilleure parmi les traductions latines anciennes<sup>21</sup>. De plus, l'auteur y présente une traduction française du texte d'al-Khwārizmī, faite pour la première fois, et une étude mathématique et historique de

---

<sup>17</sup> Qualifiée "*meilleure*" par R. Rashed [p. 90].

<sup>18</sup> Voir la bibliographie, [al-Khwārizmī].

<sup>19</sup> Dix ans plus tôt, A. Anbouba avait déjà publié un petit manuel, moins important, intitulé : "*Notes sur l'algèbre d'al-Khwārizmī*" Publications de l'Université Libanaise, Beyrouth, 1968 : "الجبر والمقابلة" في "إحياء الجبر", درس لكتاب الخوارزمي في "الجبر والمقابلة" .

<sup>20</sup> Seuls deux manuscrits dont l'auteur signale l'existence (ceux de Kaboul) n'ont pas pu contribuer à cette édition.

<sup>21</sup> On connaît deux autres traductions latines, celle de Robert de Chester en 1145 et celle de Guillaume de Luna (1110-1180).



son contenu, enrichie par les nouvelles connaissances en histoire des sciences accumulées pendant les cinq dernières décennies. Cette étude éclaire certains points concernant le texte, notamment son titre. Elle traite la question de l'originalité du travail d'al-Khwārizmī et celle de ses sources -questions étroitement liées-, en prouvant que l'algèbre a "commencé" avec le livre de ce mathématicien du début du IX<sup>e</sup> siècle et non avant lui. Elle aboutit à une évaluation de la portée mathématique de cet ouvrage et met notamment l'accent sur deux types de démonstration en algèbre, apparus dans ce livre et développés ultérieurement dans l'algèbre arabe. Ces deux types sont, d'après l'auteur: "*la démonstration par la cause*" (i.e. géométrique) et "*la démonstration par l'expression*" (i.e. algébrique). En 2010, nous avons traduit ce livre de R. Rashed en arabe, sous le titre *Les mathématiques d'al-Khwārizmī – Le fondement de l'algèbre*<sup>22</sup>, et donné une introduction de sa version en cette langue. Le remplacement du mot « commencement » par le mot « fondement », dans le titre de la version arabe, n'est pas fortuit ; en effet, comme nous allons le voir, et comme on l'a souligné dans un autre article [Farès, 2015], le livre d'al-Khwārizmī contient une première forme de fondements axiomatiques de l'algèbre. Ces fondements n'ont pas cessé de se consolider avec les successeurs d'al-Khwārizmī ; leur formulation en tant que tels était impossible avant le début du XX<sup>e</sup> siècle. La référence à ce livre étant fréquente, nous allons, en nous y référant, ne mentionner que les numéros des pages, omettant le nom de l'auteur et l'année de la publication<sup>23</sup>.

## 2. 2. Aperçu de la partie théorique du livre.

Les chapitres théoriques du livre algébrique d'al-Khwārizmī se trouvent dans sa première partie<sup>24</sup>. Les autres chapitres peuvent être regroupés en trois parties:

<sup>22</sup> Voir la bibliographie: "رياضيات الخوارزمي – تأسيس علم الجبر" [راشد، ٢٠١٠].

<sup>23</sup> Par exemple, la référence [p. 5] signifiera [Rashed, 2007. p. 5].

<sup>24</sup> Voir [pp. 92-143] (i.e. [Rashed, 2007, pp. 92-143]), [al-Khwārizmī (Oxford), ff. 2<sup>r</sup>-8<sup>r</sup>], [Rosen, 1986, pp. 3-23], [Musharrafah, 1937, pp. 16-34].

- un chapitre consacré aux applications numériques illustrant la théorie exposée dans la première partie du livre. Al-Khwārizmī y résout des problèmes numériques pratiques en les ramenant à des équations algébriques<sup>25</sup> ;
- une partie géométrique, où il s'agit de calcul d'aires de figures planes et de certains calculs métriques dans ces figures ; (le seul volume qu'on y trouve est celui du cône). Certains de ces problèmes y sont ramenés à des équations algébriques. On y trouve aussi, citées, trois valeurs approchées de  $\pi$ :  $3\frac{1}{7}$ ,  $\sqrt{10}$  et 3,1416, dont les deux dernières y sont attribuées à la tradition indienne<sup>26</sup> ;
- une assez longue partie contenant plusieurs problèmes de succession (legs, héritage) résolus après avoir été ramenés à des équations algébriques<sup>27</sup>.

La lecture de la partie théorique du livre montre que:

1) Al-Khwārizmī introduit ce qu'on appelle de nos jours, *les termes primitifs* de sa théorie:

- "*al-jidhr*" ou aussi, « *al-jadhr* », ("*la racine*"), qu'on note  $x$  de nos jours, qu'il appelle aussi « *al-shay'* » c.à.d. "*la chose*"; ce terme indique l'inconnu dans les équations, mais aussi, l'indéterminée dans un polynôme ;

- "*al-māl*" ("*le bien*" -ce qu'on possède-), qui est le carré  $x^2$  de la *chose* ou, selon l'expression d'al-Khwārizmī, "*ce qui se produit de la multiplication de la racine par elle-même*" ;

- "*le nombre simple*" ("*al-'adad al-mufrad*"), c.à.d. le terme constant d'une équation mais aussi le terme de degré 0 d'un polynôme; les *nombres simples*, sont pour lui, des nombres rationnels positifs.

2) Il introduit, ensuite, le concept d'équation en introduisant les équations du premier et du second degré. Il introduit la notion de ce qu'on appelle de nos jours la "*forme normale*" ou "*canonique*" d'une équation, les formules (algorithmes) de leurs solutions et les

<sup>25</sup> Voir [pp. 144-201], [al-Khwārizmī (Oxford), ff. 8<sup>r</sup>-15<sup>r</sup>], [Rosen, 1831, pp. 24-48], [Musharrafah, 1937, pp. 34-50],

<sup>26</sup> Voir [pp. 202-231], [al-Khwārizmī (Oxford), ff. 15<sup>r</sup>-18<sup>v</sup>], [Rosen, 1831, pp. 48-64], [Musharrafah, 1937, pp. 54-66].

<sup>27</sup> Voir [pp. 232-331], [al-Khwārizmī (Oxford), ff. 18<sup>v</sup>-34<sup>r</sup>], [Rosen, 1831, pp. 65-122], [Musharrafah, 1937, pp. 67-106].

justifications géométriques de ces algorithmes. On peut schématiser sa démarche de la façon suivante:

a) Il classe les équations de degré  $\leq 2$  en six types:

$$(I) ax^2 = bx \quad , \quad (II) ax^2 = c \quad , \quad (III) bx = c$$

$$(IV) ax^2 + bx = c \quad , \quad (V) ax^2 + c = bx \quad ,$$

$$(VI) ax^2 = bx + c \quad ,$$

où  $a, b, c$  sont des rationnels positifs<sup>28</sup>.

b) Pour chacune de ces équations<sup>29</sup>, il donne la forme normale correspondante (où le coefficient de la puissance la plus élevée de l'inconnue, est 1).

c) Il donne la formule algorithmique de la solution pour chacun de ces types, réduit à sa forme normale, avec la condition d'existence de racines (réelles)<sup>30</sup>. Ces formules sont celles que nous utilisons

aujourd'hui:  $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$  (si on écrit l'équation sous la forme

moderne:  $x^2 + bx + c = 0$ ). Notons qu'il ne reconnaît pas les racines négatives<sup>31</sup>. Les formules qu'il donne sont tout à fait générales: les valeurs numériques qui accompagnent parfois les exposés sont introduites, évidemment, pour des raisons didactiques et n'influent en rien, ni sur la généralité des sujets traités ni sur la rigueur du style.

d) Il présente une justification géométrique pour l'algorithme de la solution de chacune des équations trinômes du 2<sup>e</sup> degré, réduite à sa forme canonique.

e) Immédiatement après, il donne, d'une manière abstraite, les formules permettant de calculer les expressions algébriques, qu'on peut écrire dans un langage moderne sous la forme:

<sup>28</sup> La multitude des types revient à l'ignorance de la notion de nombres négatifs. Cela a entraîné le refus de l'écriture de l'équation sous la forme  $p(x)=0$ . Ce refus subsistera encore pendant de nombreux siècles.

<sup>29</sup> À l'exception de l'équation (III).

<sup>30</sup> Dans le cas où la question d'existence se pose, i.e pour le type (V).

<sup>31</sup> Cette négligence des racines négatives subsistera encore pendant de nombreux siècles jusqu'à même *la Géométrie* de Descartes (1596-1650), pour lequel ces racines sont les "fausses racines" (Ch. Adam et P. Tannery, 1982, *La Géométrie de Descartes, Discours de la méthode et essais*, VI, Vrin, Paris, p. 445).

- (1)  $(a \pm bx).(c \pm dx)$ ,  
 (2)  $(ax \pm b) \pm (cx \pm d)$ ,  
 (3)  $(ax^2 \pm bx \pm c) \pm (a'x^2 \pm b'x \pm c')$ ,

où  $a, b, c, \dots$ , sont des rationnels positifs, marquant ainsi le commencement du calcul polynomial.

Notons, enfin, que des règles de calcul telles que

$$(4) \quad a\sqrt{x^2} = \sqrt{a^2x^2}, \sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{ab},$$

$$\frac{p\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{p^2a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{p^2a}{b}}, \dots$$

ont été énoncées par al-Khwārizmī, dans le cas où  $a, b, p \in \mathbb{Q}^+$ , et  $x$  est la racine d'un māl "connue ou sourde"<sup>32</sup>.

Al-Khwārizmī s'est limité aux équations de degrés  $\leq 2$  et aux termes primitifs correspondants, "en raison de l'exigence de la résolution par radicaux et à cause de son savoir faire dans ce domaine" [Rashed, 1997, vol. 2, p. 32] ; c'est semble-t-il, la raison pour laquelle il n'a pas introduit des règles de multiplications pouvant faire intervenir des produits tels que  $x.x^2$  ou  $x^2.x^2$ .

f) Il donne une justification arithmétique de la règle (1) ; ensuite il donne une justification géométrique de la règle (2) (en représentant  $a, b, c, d, x$ , par des segments de droite), puis, il déclare qu'il ne peut pas faire de même pour la règle (3), tout en exprimant qu'elle est évidente: "quant à sa nécessité, elle est évidente par l'expression" [p. 140].

g) Il introduit les deux mots "al-jabr" (algèbre) et "al-muqābala" (comparaison) désignant deux opérations algébriques<sup>33</sup>.

<sup>32</sup> C'est la première fois que le mot *sourd* (i.e. irrationnel) -grec à l'origine- est utilisé dans le livre d'al-Khāwrizmī, et une des premières fois qu'il a été utilisé dans la littérature mathématique arabe. Son utilisation est d'ailleurs peu fréquente dans le texte d'al-Khāwrizmī: on l'y rencontre encore une seule fois après cette occurrence [p. 133] et [al-Khāwrizmī (Oxford), f. 6<sup>v</sup>].

<sup>33</sup> Le mot "al-jabr" est utilisé par al-Khwārizmī dans le sens figuré de "recollement, ou restauration" (d'un objet cassé, ou d'un membre du corps fracturé) : opération qui consiste à faire disparaître un terme négatif (soustractif) qui figure dans l'un des membres d'une équation, en ajoutant la valeur absolue de ce terme aux deux membres. Al-muqābala consiste à éliminer les termes communs aux deux membres,

Ce qui précède montre qu'al-Khwārizmī, après avoir introduit, d'une façon abstraite, les termes primitifs de l'algèbre, a lancé les fondements des deux chapitres qui constituent jusqu'à nos jours la base et l'objet de cette science:

- 1) la résolution par radicaux des équations polynomiales;
- 2) le calcul polynomial.

On s'aperçoit donc, dans le livre d'al-Khwārizmī, de la formation, ou plutôt de la naissance ou – comme l'indique le titre du livre de R. Rashed - du "*commencement*" de l'algèbre.

### **3. Note rapide sur l'expression : « commencement de l'algèbre ».**

En parlant de "*commencement*" on ne veut évidemment pas dire que l'histoire n'a pas connu avant al-Khwārizmī des pratiques ou des procédés que nous pouvons qualifier actuellement<sup>34</sup> d'algébriques (du fait qu'ils traitent des inconnues et des équations). D'innombrables problèmes sur les nombres, les longueurs, les surfaces ou sur d'autres grandeurs, conduisaient, en effet, à de telles pratiques. D'importantes empreintes de pratiques algébriques (et, même de problèmes revenant à des équations du 2<sup>e</sup> degré avec leurs solutions) se trouvent sur des tablettes babyloniennes<sup>35</sup>. Au 4<sup>e</sup> s. av. J-C, Euclide présente dans le livre II des *Éléments*, des propositions sur les longueurs et les surfaces rectangulaires, dont l'interprétation algébrique est facile et conduit à des identités algébriques importantes ainsi qu'à une résolution des équations trinômes du 2<sup>e</sup> degré. Plus tard, près de six siècles avant al-Khwārizmī, Diophante a manipulé des puissances de l'inconnue (numérique) allant jusqu'à la neuvième [Rashed & Houzel, 2013, pp. 25-26 et 31] et a utilisé des techniques algébriques développées au

---

de sorte à ramener l'équation à l'un des 6 types. La littérature algébrique arabe est presque unanime sur la signification de ces deux termes dont l'utilisation commence dans le livre d'al-Khwārizmī, vers la fin de la partie théorique ("le chapitre sur les six problèmes").

<sup>34</sup> C'est-à-dire après la constitution de l'algèbre grâce au livre d'al-Khwārizmī et aux travaux de ses successeurs.

<sup>35</sup> Voir [Dahan-Dalmedico et Peiffer 1986, pp. 72-74] et [Rashed et Houzel, 2013, pp. 9-13].

cours de ses résolutions de problèmes numériques dans sa grande œuvre, *Les Arithmétiques*. Il a résolu des problèmes pouvant être ramenés à des équations du 2<sup>e</sup> degré en utilisant des techniques qui s'apparentent aux méthodes babyloniennes<sup>36</sup>. Au 6<sup>e</sup> siècle de notre ère, on trouve dans la tradition indienne –Brahmagupta (598-668) et Aryabhata (476-550)- des règles de calcul sur les racines carrées ainsi que des équations du 2<sup>e</sup> degré résolues en utilisant des algorithmes qui ressemblent à ceux d'al-Khwārizmī<sup>37</sup>.

On comprend donc bien que, par l'expression "*commencement de l'algèbre*", on veut en fait dire que les inconnues, les équations et les polynômes n'ont jamais été traités avant ce livre du 9<sup>e</sup> siècle, comme des objets mathématiques; on se contentait plutôt de les manipuler d'une façon aléatoire, au cours de la résolution de tel ou tel problème géométrique, arithmétique ou autre. Leur naissance comme des êtres mathématiques à part entière, accompagnée de celle des lois qui régissent leur traitement, est l'acte qualitatif nouveau qui a déterminé la naissance de l'algèbre.

Pour plus de détails sur les pratiques algébriques antérieures à al-Khwārizmī, voir le deuxième chapitre de notre livre [Farès, N. 2017]. Voir aussi le chapitre I du même livre pour plus de renseignements sur : le langage mathématique d'al-Khwārizmī, les sources de son algèbre et l'influence de cette algèbre sur la tradition mathématique arabe et sur la mathématique en Europe latine.

### Ouvrages cités

\*Dans ce qui suit, les références qui sont citées en français et en arabe, ont été traduites et publiées en cette dernière langue. La liste des ouvrages cités est extraite de celle du livre [Farès, N. 2017] : *Naissance et développement de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe*

### المراجع المذكورة

\* في ما يلي، المراجع المذكورة بالعربية وبلغت أخرى، جرت ترجمتها إلى العربية ومتوفرة باللغتين. واللائحة التالية مقتطعة من لائحة مراجع الكتاب [فارس، ن. ٢٠١٧].

<sup>36</sup> Op. cit. pp. 77-80. Voir aussi [Ver Eecke 1959, prop. I. 27, I. 28, I. 30, pp. 36-40], ou [Rashed et Houzel, 2013, pp. 170-171], ou [Farès, 2017, ch. 2, §2].

<sup>37</sup> Pour plus de détails, voir [Farès, N. 2017, pp. 65-79].

Allard, A. 1997. "Influence des mathématiques arabes en Occident au Moyen Age", dans *Histoire des sciences arabes*, [Rashed, R. 1997 (sous la direction de, avec la collaboration de Morelon, R)], cité plus bas, vol. 2, pp.199-229.

آلارد (أندريه). ١٩٩٧. "تأثير الرياضيات العربية في الغرب في القرون الوسطى"، مقال في "موسوعة تاريخ العلوم العربية"، [راشد، ١٩٩٧]، المذكور أدناه، المجلد الثاني، ص. ٦٦٩-٧٣٦).

Anbouba, A. 1978. "L'algèbre arabe aux IX<sup>e</sup> et X<sup>e</sup> siècles – Aperçu général". *Journal for the history of Arabic science*. Alep. Vol. 1, no. 2, pp. 66 – 100.

Dahan-Delmico, A. et Peiffer, J. 1986. *Une histoire des mathématiques – Routes et dédales*, Seuil, Paris.

Farès, N. 2015. Al-Khwārizmī et le fondement analytique de l'algèbre. *Lebanese Science Journal*, Vol. 16, No. 1.

Farès, N. 2017. *Naissance et développement de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe*. Dār al-Fārābī, Beyrouth.

فارس، ن. ٢٠١٧. "الجبر - ولادته وتطوره في التقليد الرياضي العربي"، دار الفارابي، بيروت

Kennedy, E. S. 1997. "La géographie mathématique", dans *Histoire des sciences arabes*, [Rashed, R. 1997 (sous la direction de, avec la collaboration de Morelon, R)], cité plus bas, vol. 1, pp. 47-94.

كينيدي، أ. س. ١٩٩٧. "الجغرافيا الرياضية"، مقال في "موسوعة تاريخ العلوم العربية"، [راشد، ١٩٩٧]، المذكور أدناه، المجلد الأول، ص. ٢٦٧-٢٩٢.

Al-Khwārizmī, M. *Kitāb al-jabr wa al-moqābala*. Bodl . Mo. Huntington (Al-Khwārizmī 214), ff. 1<sup>v</sup>-34<sup>r</sup>, (Oxford) copié en 1342.

الخوارزمي، محمد بن موسى. "كتاب الجبر والمقابلة". مخطوطة أوكسفورد، المذكورة في المرجع السابق.

Morelon, R. 1997. "L'astronomie arabe entre le VIII<sup>e</sup> et le XI<sup>e</sup> siècle", dans *Histoire des sciences arabes*, [Rashed, R. 1997 (sous la direction de), avec la collaboration de Morelon, R, cité plus bas, vol. 1, pp. 47-94].

مورلون، ر. ١٩٩٧. "علم الفلك العربي بين القرنين الثامن والحادي عشر"، مقال في "موسوعة تاريخ العلوم العربية"، [راشد، ١٩٩٧]، المذكور أدناه، المجلد الأول، ص. ٤٧ - ٩٤.

Musharrafah, A. 1937 :

مشرفة، علي مصطفى، ومرسي أحمد، محمد: "كتاب الجبر والمقابلة، لمحمد بن موسى الخوارزمي" تحقيق وتعليق. الجامعة المصرية كلية العلوم، القاهرة، ١٩٣٧.

Al-Nadīm (Ibn). *Le Fihrist*. Édition Rida Tajaddud, Dar al Masīra, Beyroyh, S.D.

ابن النديم. "كتاب الفهرست"، تحقيق رضا تجدد، دار المسيرة، بيروت، بدون تاريخ. القفطي (أبو الحسن علي بن يوسف)، تاريخ الحكماء، وهو مختصر الزوزني المسمى بالمختصرات الملتقطات من كتاب إخبار العلماء بأخبار الحكماء، تحقيق يوليوس ليرت (ليبتزج)، ١٩٠٣.

Al-Qifī' (Ibn), *Ta'riḥ al-Ḥukamā'*. Ed. J. Lippert. Leipzig. 1903.

Rashed, R. 1984 (1). *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Les Belles Lettres, Paris.

راشد، ر. ١٩٨٩. "تاريخ الرياضيات العربية - بين الجبر والحساب" مركز دراسات الوحدة العربية - بيروت. نقله إلى العربية د. حسين زين الدين عن صيغته الفرنسية.

Rashed, R. 1997 (sous la direction de, avec la collaboration de Morelon, R). *Histoire des sciences arabes*”, Seuil, Paris.

راشد، ر. ١٩٩٧، (بإشرافه، بالتعاون مع مورلون، ر). "موسوعة تاريخ العلوم العربية" ٣ مجلدات. مركز دراسات الوحدة العربية - بيروت. نقلها إلى العربية فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي، عن صيغتها الفرنسية [Rashed, R. 1997].



Rashed, R. et Vahabzadeh, B. 1999. "*Al-Khayyām mathématicien*", Blanchard, Paris.

راشد، ر، ووهاب زاده، ب. ٢٠٠٥. "رياضيات عمر الخيام"، ترجمة نقولا فارس (فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي)، وصدر عن مركز دراسات الوحدة العربيّة، بيروت، عن الأصل الفرنسي المذكور ([1999]).

Rashed, R. 2007. *Al-Khwārizmī – Le commencement de l'algèbre*, Blanchard, Paris.

راشد، ر. ٢٠١٠. "رياضيات الخوارزمي - تأسيس علم الجبر"، ترجمة نقولا فارس (فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي)، صدر عن مركز دراسات الوحدة العربيّة، بيروت، ترجمة عن الأصل الفرنسي المذكور ([Rashed, 2007]).

Rashed, R. et Houzel, C. 2013. *Les arithmétiques de Diophante*. Walter De Gruyter GmbH, Berlin/Boston.

Rosen, F. 1830. *The algebra of Mohamed ben Musa*, Edited and translated by Georg Olms Verlag, Zurich, New York (éd. 1986).

روزن، ف. ١٨٣٠. الخوارزمي (محمد بن موسى): "الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة"، طبعة ١٩٨٦.

Toomer, G. J. 2008. "Al-Khwārizmī, Abū Ja'far Muhammad Ibn Mūsā". Complete Dictionary of Scientific Biography. *Encyclopedia.com*. 26 Jul. 2013 <<http://www.encyclopedia.com>>.

Ver Eecke, P. 1926. *Diophante d'Alexandrie : les six livres d'arithmétique et le livre des nombres polygones*. Blanchard, Paris.

Youschkévitch, A. P. 1976. *Les mathématiques arabes (VIII<sup>e</sup>-XV<sup>e</sup> siècle)*, Vrin, Paris.