ABU KAMIL

Vie, œuvre et livre algébrique

Par Nicolas Farès

(1-12-2017)

Équipe d'Études et de Recherches sur la Tradition Scientifique Arabe
Société Libanaise d'Histoire des Sciences Arabes

La présente étude est extraite du chapitre IV du livre de l'auteur intitulé : *Naissance et développement de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe*, Dār al-Fārābī, 20017, Beyrouth.

1. Vie et œuvre.

Abū Kāmil Shujāʿ ibn Aslam al-Ḥāsib al-Miṣrī[1] est un ingénieur des constructions navales qui a vécu en Egypte et a été actif sous le règne d'Ahmad ibn Ṭūlūn (868-905). Certains historiens des sciences contemporains ont avancé les dates approximatives suivantes (850-930) de sa naissance et de sa mort ; ces dates ont été rectifiées récemment par R. Rashed qui, après une longue analyse historique avance les dates -qui restent approximatives- (830-900). Ce mathématicien éminent a écrit plusieurs livres et traités dans des domaines divers dont l'algèbre.

À partir du début du XX^e siècle, plusieurs études sur l'algèbre d'Abū Kāmil ont été publiées[2]. Nous nous référons ici à trois d'entre elles. Les deux premières se trouvent dans [Youschkevitch, 1976, pp.

[1] Le qualificatif *al-Ḥāsib* signifie *le calculateur*. Le surnom qualificatif *al-Miṣrī* signifie *originaire de Miṣr* : l'Egypte.

[2] R. Rashed en cite, entre autres, celles de : H. Suter (1908), L. C. Karpinsky (1912 et 1914, J. Weinberg (livre publié en 1934 et 1935), M. Levey (1970), J. Sésiano (1993), A. P. Youschkevitch (1964, en russe et 1976 en français) et A. Anbouba (1978).

52-61] et dans [Anbouba, 1978, pp. 78-88]. La première n'est pas réalisée à partir du texte original du livre algébrique d'Abū Kāmil mais, d'une traduction en latin et d'une autre, en hébreu ancien, de ce livre ; celle d'Anbouba se fonde sur le seul texte manuscrit arabe du livre qui ait survécu jusqu'à nos jours. Récemment, R. Rashed a publié un livre intitulé *Abu Kāmil: Algèbre et analyse diophantienne* [Rashed, 2012], dans lequel il présente une édition du livre et d'un deuxième traité en analyse numérique d'Abū Kāmil intitulé *Sur les volatiles*[3], une traduction en français et une étude mathématique et historique de chacun de ces deux ouvrages[4].

Il nous est parvenu une liste de 11 titres de livres ou traités attribués à Abū Kāmil [Rashed, 2012, pp. 6-7]. Neuf parmi ces 11 titres, ont été cités dans l'œuvre biobibliographique d'Ibn al-Nadīm : 1) *Kitāb al-jabr wa al-muqābala*, 2) *Kitāb al-Ṭayr* (Sur les volatiles), 3) *Kitāb al-Khaṭa'ayn* (Sur les deux erreurs), 4) *Kitāb al-jam' wa-al-tafrīq* (L'addition et la soustraction), 5) *Kitāb al-misāḥa wa al-handasa* (La mensuration des terrains), 6) *Kitāb al-'āṣīr* (le livre du jus), 7) *Kitāb al-Falāḥ* (Le livre du labeur (labour ?)), 8) *Kitāb Miftāḥ al-Falāḥ* (La clé d'al-Falāḥ), 9) *Kitāb al-Kifāya* (Le livre de la suffisance). Le biobibliographe plus tardif, Hājī Khalīfah (1609-1657), ajoute à la liste d'Ibn al-Nadīm deux autres titres: 10) *Hisāb al-dawr wa al-waṣāya* (Le livre du retour légal et des testaments), 11) *Kitāb al- waṣāya bi al-judhūr* (Le livre des testaments par les racines). Ces 11 titres n'indiquent probablement que neuf ouvrages, vu la ressemblance de deux d'entre eux avec deux autres. R. Rashed donne

[3] Ce traité dont le titre figure dans la liste d'Ibn al-Nadīm, est resté introuvable sous ce titre ; les historiens des sciences ont cru alors qu'il était perdu. Récemment, R. Rashed a prouvé qu'il s'agit en fait, du traité portant le titre « *Ṭarā'if al- ḥisāb* » qui ne figure pas dans les anciens livres bibliographiques. Il en a conclu que le changement du titre de ce traité revient à une initiative d'un de ses anciens copistes. C'est sous ce dernier titre que S. Chalhoub avait publié une transcription arabe de son texte manuscrit (*Journal for the history of Arabic Science*, vol. 12, no 1-2, pp. 237-264) [Rashed, 2012, pp. 27-30].

[4] Les trois études susmentionnées, notamment la dernière, nous ont été très utiles pour la rédaction de ce paragraphe.

un aperçu historique de trois de ces ouvrages, dont les deux premiers sont édités dans son livre : *Kitāb al-jabr wa al-muqābala* (son fameux livre en algèbre et en analyse indéterminée rationnelle), *Kitāb al-Ṭayr* (*Sur les volatiles*, qui traite des problèmes en analyse indéterminée du 1er degré en nombres entiers[5]) et *Kitāb al-misāḥa wa al-handasa* (*la mensuration des terrains*, destiné aux artisans et aux débutants pour leur enseigner comment résoudre les problèmes de mensuration des terrains par l'algèbre) ; ces trois ouvrages d'Abū Kāmil sont ceux « dont les textes arabes existent » [Rashed, 2012, pp. 1-31].

2. Aperçu de l'algèbre d'Abū Kāmil.

Abū Kāmil a développé remarquablement l'algèbre d'al-Khwārizmī (…-813-833…) dans tous ses chapitres théoriques, et a clarifié le contenu de plusieurs d'entre eux. Le lecteur de son livre algébrique perçoit, dès les premières pages, son intention de bâtir l'algèbre d'al-Khwārizmī sur une base théorique solide, à savoir les *Éléments* d'Euclide (4e - 3e s. av. J.-C.) . En effet, il a présenté des justifications géométriques des algorithmes de résolution des équations trinômes du 2e degré, en se référant explicitement aux propositions II. 5 et II. 6 des *Éléments*. De plus, il leur a ajouté des algorithmes permettant de calculer x^2 sans passer par le calcul de x, avec leurs justifications géométriques ; il a donné une justification géométrique de la résolution de l'équation $ax^2 = bx$, énoncée sans preuve par al-Khwārizmī. De même, il a justifié géométriquement les règles de calcul concernant le produit des binômes et d'autres règles de calcul algébrique, en utilisant des raisonnements fondés sur le Livre II des *Éléments*.

Toutefois, bien que la géométrie ait été largement utilisée par Abū Kāmil, son algèbre est marquée par une nette tendance à l'arithmétisation. Il a étendu l'opération de la division des nombres aux grandeurs algébriques en faisant le lien entre cette opération et la multiplication, au moyen de la *théorie des proportions*. Dans la

[5] Les nombres entiers dans les équations sont ceux d'oiseaux, de différentes espèces, intervenant dans les problèmes posés à travers ce traité. Un exemple de ces problèmes sera évoqué dans les notes du §3 qui suit.

justification de certaines règles de calcul (notamment celles dans lesquelles intervient la division), ses raisonnements s'appuient sur des propositions arithmétiques (du Livre VII) ainsi que sur des propositions utilisant la *théorie des proportions* des Livres V et VI des *Éléments*[6].

Au début de son livre algébrique, Abū Kāmil cite en se référant nommément à al-Khwārizmī, les trois grandeurs : *nombre*, *racine* (ou *chose* : *shay'*) et *carré* (*māl*). Tout comme lui, il commence par un chapitre consacré à la théorie des équations algébriques des deux premiers degrés, qu'il fait suivre de deux autres : le premier porte sur le calcul algébrique et le second sur des exercices d'application. Cependant, au cours du livre, il étend les puissances de l'inconnue jusqu'à la huitième, utilisant, comme l'avait fait Diophante (vers le 3e s. de notre ère), la formation additive des exposants[7] et omettant, comme lui, la septième puissance. Les équations où apparaissent de telles puissances de l'inconnue sont du type $ax^{2n+p} + bx^{n+p} = cx^{p}$, qui se ramènent donc à des équations du 2e degré[8] (et que l'on rencontre chez d'autres mathématiciens contemporains dont Sinān Ibn al-Fatḥ, par exemple). De plus, tandis qu'al-Khwārizmī n'utilise qu'une seule inconnue, Abū Kāmil s'en sert de plusieurs[9].Il

---

[6] Voir des exemples dans les notes complémentaires 3, plus loin.

[7] Le cube (*Ka'b*), le carré-carré (*māl māl*), le carré-carré-chose (le *māl māl shay'*), le cubo-cube (*Ka'b Ka'b*), le carré-carré-carré-carré (*māl māl māl māl*). Notons qu'Abū Kāmil (voir plus loin) n'a pas connu *Les Arithmétiques* de Diophante pour lequel x^5 s'appelle le *carré-cube*, … [Rashed, 2012, p. 53].

[8] Par exemple, Abū Kāmil ramène le système : $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = z^2 \\ x.z = y^2 \\ x.y = 10 \end{array}\right\} (x < y < z)$, à l'équation : $x^8 + 100x^4 = 10000$, et donne la solution : $x = \sqrt[4]{\sqrt{12500} - 50}$ [Rashed, 2012, pp. 99-100] (voir aussi le texte, dans le ch. « *sur les problèmes divers* », prob. no . 65, pp. 478-480).

[9] Qu'il désigne parfois avec des dénominations particulières : *racine* ou *chose* (*shay'*) pour la première inconnue, *dīnār* pour la deuxième, *fils*e pour la 3e, *khātem* (cachet), pour la 4e.

transforme les problèmes qu'il pose en équations (ou systèmes d'équations) algébriques. Il les résout en utilisant quelquefois plusieurs méthodes et en diversifiant les techniques algébriques (élimination, substitution, introduction d'une inconnue auxiliaire, changement d'inconnue pour transformer une équation ou un système d'équations en une équation d'un type dont la résolution est connue)[10].

Abū Kāmil a été l'un des premiers à avoir utilisé les irrationnels quadratiques comme racines d'équations algébriques et le premier à les avoir utilisés comme coefficients d'équations[11]. Le fait de traiter les grandeurs irrationnelles comme des nombres et de leur appliquer les opérations de l'arithmétique, est extrêmement important : il marque le début de tout une tradition mathématique qui a évolué pendant plusieurs générations, utilisant l'algèbre comme moyen pour lire, expliquer et développer la théorie des irrationnels du livre X d'Euclide. Depuis al-Māhānī (825-883?) jusqu'à as-Samaw'al (12^{e} s.) les noms des mathématiciens de cette tradition constituent une longue liste[12]. Leurs travaux ont développé la nouvelle discipline qu'est l'algèbre, parce qu'ils lui ont offert une mine très riche d'exercices : le domaine des grandeurs irrationnelles[13] ; Ces travaux ont surtout abouti à la transformation de la théorie des irrationnels du Livre X. En effet, pour ces mathématiciens, les irrationnels ne sont plus seulement des grandeurs géométriques -comme chez Euclide, mais des objets algébriques auxquels on peut, donc, appliquer toutes les opérations de l'arithmétique utilisées en algèbre.

---

[10] Voir des exemples dans la note complémentaire 3. 2, plus bas.

[11] Voir des exemples dans la note complémentaire 3. 2, plus bas. Al-Māhānī (…-880), un contemporain d'Abū Kāmil, avait, lui aussi, utilisé les irrationnels quadratiques comme racines d'équations du 2^{e} degré [Ben Miled, 2005, pp. 9-10] ; voir aussi [Farès, 2009] et [Farès, 2016, ch. I, §2. 2].

[12] Cette liste comprend, entre autres noms, ceux de: Al-Māhānī, Suleiman Ibn ʿIsmah, al-Khāzin, al-Ahwāzī (10^{e} s.), Ibn al-Bagdādī, al-Karajī (11^{e} s.), al-Faraḍī, As-Samaw'al (12^{e} s.) [Ben Miled, 2005, pp. 9-10] ; voir aussi [Farès, 2016, ch. I, §2. 2].

[13] Depuis al-Māhānī on a utilisé des équation du 2^{e} degré pour calculer les racines carrées des binômes et des apotômes (les irrationnels de la forme $x = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, $a \pm \sqrt{b}$, … où *a* et *b* sont des nombres rationnels) ; voir [Ben Miled, 1999, et 2005].

Abū Kāmil a été aussi le premier à introduire l'analyse indéterminée des deux premiers degrés à titre de chapitre à part entière dans les traités d'algèbre. Il a consacré à ce domaine une bonne partie de son livre algébrique. Cette partie contient 43 problèmes revenant à des systèmes d'équations indéterminées dont les solutions, quand elles existent, sont rationnelles. R. Rashed remarque *« qu'al-Khwārizmī n'a pas abordé cette étude dans son livre, et Diophante, bien avant, s'il étudie dans ses* Arithmétiques *essentiellement des problèmes indéterminés, ne distingue pas plus entre problèmes déterminés et problèmes indéterminés qu'entre problèmes possibles et problèmes impossibles. Avec Abū Kāmil les distinctions sont rigoureusement établies et, plus important encore, il cherche à constituer, pourrait-on dire, une algèbre de problèmes indéterminés, c'est-à-dire à fonder un nouveau chapitre des mathématiques : l'analyse indéterminée. A son tour, cette recherche va contribuer à élargir le domaine du calcul algébrique et l'enrichir de nouveaux algorithmes, ainsi que de nouvelles méthodes de démonstration algébrique, comme celle de l'élimination. On peut donc voir dans cet évènement le début d'une longue marche dans ces deux domaines à la fois : l'analyse indéterminée et le calcul algébrique abstrait* » [Rashed, 2012, p. 145].

En fait, Abū Kāmil exprime clairement son intention de fonder ce chapitre. En effet, dans l'introduction du chapitre qu'il a consacré aux problèmes indéterminés, il dit : « *Nous expliquons maintenant beaucoup de problèmes indéterminés que certains arithméticiens appellent fluides -je veux dire par cela qu'elles peuvent avoir de nombreuses solutions vraies-, par une inférence convaincante et une méthode claire ; certains de ces problèmes circulent parmi les arithméticiens selon des types, sans qu'ils aient établi la cause à partir de laquelle ils procèdent. J'ai résolu certains d'entre eux à l'aide d'un principe valide et d'une procédure facile et utile, …* » [Rashed, 2012, p. 579]. De plus, dans sa longue introduction au livre *« Sur les volatiles* », il dit : « *J'ai vu l'une des sortes d'arithmétique qui circule entre les hommes des sciences et les hommes communs, entre le savant et l'ignorant, avec laquelle ils se divertissent et qu'ils apprécient, qu'ils trouvent ingénieuse et à propos de laquelle les uns* *interrogent les autres. Celui qui parmi eux répond, il le fait par conjecture et par intuition, sans revenir en cela à un principe ou à une inférence …* » ; il poursuit : « *J'ai donc décidé de composer un livre sur cette sorte, dans lequel je rends facile le procédé qui s'y trouve et le rends plus accessible ; j'indique comment déterminer la solution correcte du problème là où c'est possible, je montre celui où il n'y a qu'une seule solution et j'explique celui où il n'y a absolument aucune solution par un vrai procédé et un discours démonstratif jusqu'à ce que je parvienne au problème que je t'ai indiqué qu'il a deux mille six cent soixante-seize solutions correctes …* » [Rashed, 2012, p. 578, p. 732].

Dans ce dernier livre connu longtemps sous le nom de « *problèmes curieux*[14] *en arithmétique* » et dont R. Rashed montre que le véritable titre est *« Sur les volatiles* », Abū Kāmil présente une étude dans laquelle il « *inaugure l'analyse indéterminée entière du premier degré, domaine complètement étranger à Diophante, comme l'avait remarqué P. Tannery* » [Rashed, 2012, p 219]. Il énonce et résout 6 problèmes (qu'il donne à titre d'exemples). Il les traduit en des systèmes indéterminés d'équations du premier degré à plusieurs inconnues, dont la résolution est exigée en nombres entiers[15]. Le premier problème a une solution unique, le 2^e en a 6, le troisième 98 (Abū Kāmil en donne 96), le quatrième 304, le cinquième est

[14] « *Kitāb ṭarā'if al- ḥisāb* » (voir le *livre sur les volatiles* [Rashed, 2012, pp. 737-767]. Dans plusieurs traductions connues, le mot *ṭarā'if* est rendu par : *problèmes rares*. Nous croyons qu'il s'agit, plutôt de l'expression : *problèmes curieux* car l'adjectif *ṭarīf* : طريف (curieux), dérive avec le mot *ṭara'if* de la même racine.

[15] En voici un (le troisième de ces problèmes) : "*Si on te paie cent dirhams et on te dit: achète avec cela cent volatiles de quatre espèces : canards, poulets, pigeons et oiseaux. Un canard pour quatre dirhams ; les oiseaux, chacun pour un dixième de dirham ; deux pigeons pour un dirham et un poulet pour un dirham* » (Abū Kāmil, avertit au début de son traité qu'on n'accepte pas l'achat d'un volatile non entier). Il transforme ce problème en le système : $\begin{cases} x + y + z + t = 100 \\ 4x + \frac{1}{10}y + \frac{1}{2}z + t = 100 \end{cases}$, auquel il donne 96 solutions (de 98).

impossible et le sixième, a 2678 solutions (Abū Kāmil lui en a donné 2676).

Notons aussi qu'avec Abū Kāmil apparaît une pratique importante dans la marche de l'algèbre vers son indépendance de la géométrie, à savoir le non respect de l'homogénéité. Il lui arrive en effet d'égaler une surface à un segment ("*le rectangle AE est la racine de AC*") lors de la justification géométrique de sa résolution de l'équation $ax^2 = bx$; de même, il représente une surface par un segment et une autre, dans la même figure géométrique, par un rectangle, lors de sa détermination de x^2 sans passer par *x*, dans sa résolution des différents types d'équations trinômes du 2^e degré [Rashed, 2012, pp. 247 et 257]. Cette même représentation sera pratiquée plus tard, dans les mêmes circonstances par son successeur du 11^e siècle, al-Karajī [Wœpcke, 1853, pp. 68-71; al-Karajī (2), ch. "*sur les six problèmes*"]. Le non respect de l'homogénéité jouait plus tard, à partir de Descartes, un grand rôle dans le développement de l'algèbre et de la géométrie algébrique.

3. Notes complémentaires.

3. 1. Exemples de justifications de règles de calcul.

1) Abū Kāmil donne la règle de calcul: $\frac{a}{b} = c \Rightarrow a = b.c$ (1) (qu'il utilisera comme lemme dans ses raisonnements et calculs ultérieurs) ; il l'énonce de la façon suivante: "*Sache que lorsque tu multiplies le quotient par le diviseur tu retrouves le divisé … et je compose pour ce procédé une proposition générale …* ». Pour justifier cette règle de calcul algébrique, il s'appuie sur un modèle arithmétique : il considère *a*, *b*, et *c* comme nombres entiers et utilise implicitement la proposition VII. 19 des *Éléments* qu'on peut exprimer de la façon suivante:

$$a : b = c : d \Leftrightarrow a.d = b.c \quad [16].$$

[16] Rappelons que $a : b$ désigne le rapport de *a* à *b*, et $\frac{a}{b}$ le quotient de *a* par *b*.

Il s'agit, ainsi, d'une justification arithmétique de cette règle de calcul algébrique.

2) On peut écrire (en langage moderne) la preuve donnée par Abū Kāmil à la règle de calcul : $\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, de la façon suivante :

On a: $\begin{bmatrix} \sqrt{b}.\sqrt{b}=b \\ et \\ \sqrt{b}.\sqrt{a}.=\sqrt{a}\sqrt{b} \end{bmatrix}$, d'où : $\sqrt{b}:\sqrt{a}=b:\sqrt{a}.\sqrt{b}$ (2).

D'autre part, on a : $\begin{bmatrix} \sqrt{a}.\sqrt{b}.=\sqrt{a}.\sqrt{b} \\ et \\ \sqrt{a}.\sqrt{a}=a \end{bmatrix}$, d'où : $\sqrt{b}:\sqrt{a}=\sqrt{a}.\sqrt{b}:a$ (3).

Les relations (2) et (3) donnent : $b:\sqrt{a}.\sqrt{b}=\sqrt{a}.\sqrt{b}:a$ (4),

d'où : $a.b=\left(\sqrt{a}.\sqrt{b}\right)^2$ (5), ce qui est équivalent à $\sqrt{a.b}=\sqrt{a}.\sqrt{b}$.

Remarque. Dans le cas où *a* et *b* sont des nombres, les relations (2) et (3) sont déduites des propositions VII. 17 et VII. 18 des *Éléments*. La relation (5) découle de la proposition VII. 19. Ici, Abū Kāmil, n'a pas cité explicitement ces propositions.

3) Abū Kāmil énonce la règle de calcul $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, avec ces termes: "*Si on divise deux nombres quelconques l'un par l'autre, alors la racine du quotient est ce que l'on obtient de la division de la racine du nombre divisé par la racine du nombre diviseur* ». Puis il présente une justification arithmétique de cette règle de calcul algébrique, en s'appuyant implicitement sur les propositions VII. 17 , VII. 18, VII. 19 et sur la règle (1) : $\frac{a}{b}=c\Rightarrow a=b.c$ (voir l'exemple 1), qui s'écrit aussi (1) : $a=b.\frac{a}{b}$. On peut schématiser son raisonnement de la façon suivante[17] :

[17] Voir le texte d'Abū Kāmil dans [Rashed, 20012, pp. 309-311].

On a $\left[a = b.\frac{a}{b} \;\; et \;\; b = b.1 \right]$ (d'après (1)), d'où :

$$\left[1 : b = \frac{a}{b} : a \right] \text{ (6).}$$

De même, on a $\left[\sqrt{a} = \sqrt{b}.\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \;\; et \;\; \sqrt{b} = \sqrt{b}.1 \right]$(d'après (1)), d'où (d'après les propositions VII. 17 et VII. 18) :

$$\left[1 : \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} : \sqrt{a} \right] \text{ (7) ;}$$

donc, d'après la proposition VI. 22 :

$$\left[1.1 : \sqrt{b}.\sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} : \sqrt{a}.\sqrt{a} \right] \text{ (8),}$$

d'où :

$$\left[1 : b = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \right)^2 : a \right] \text{ (9).}$$

La comparaison des relations (6) et (9) précédentes montre que : $\left[\frac{a}{b} : a = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \right)^2 : a \right]$, d'où $\left[\frac{a}{b} = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \right)^2 \right]$, d'où: $\left[\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \right]$.

3. 2. Exemples de diversification des raisonnements algébriques, et d'équations à coefficients et racines irrationnels[18].

1) Le problème suivant : « *Si on te dit tu divises dix en deux parties et tu multiplies chaque partie par elle-même, puis tu retranches le plus petit du plus grand, il reste quatre-vingt* », qu'on peut traduire au système

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 10 \\ y^2 - x^2 = 80 \end{array} \right\} (x < y)$$

---

[18] Voir les problèmes, 7, 47 et 61, dans l'ordre, dans [Rashed, 2012, pp. 47-48, 335-337, 84-85, 427-429, 95-97, 459-461]. Voir aussi [Youschkevitch, 1976, pp. 56-58].

est résolu par Abū Kāmil de trois façons : 1/en éliminant y (en posant $y = 10 - x$ et en le remplaçant par sa valeur dans la 2e équation) ; 2/ en éliminant x (en posant $x = 10 - y$) ; 3/ en introduisant une inconnue auxiliaire, t, en posant :

$$x = 5 - t \left(= \frac{10}{2} - t \right);\ y = 5 + t \left(= \frac{10}{2} + t \right) ;$$

et en substituant dans la 2e équation.

Rappelons que cette dernière méthode est celle qui a été utilisée par Diophante lors de sa résolution des systèmes revenant à des équations du second degré (problèmes : I. 27, I. 28, I. 30) et qu'elle remonte à la mathématique babylonienne[19].

2) Le problème suivant : « *Si on te dit : tu divises dix en deux parties et tu divises chacune des parties par l'autre et tu les additionnes, alors tu as la racine de cinq dirham* » s'écrit :

$$\frac{x}{10 - x} + \frac{10 - x}{x} = \sqrt{5} .$$

En développant cette équation, Abū Kāmil la transforme en la suivante :

$$\left(2 + \sqrt{5}\right)x^2 + 100 = \left(20 + \sqrt{500}\right)x ,$$

qu'il résout, en appliquant l'algorithme d'al-Khwārizmī correspondant. Puis, il présente une deuxième méthode en effectuant un changement d'inconnue, en posant $\frac{x}{10 - x} = y$ pour obtenir l'équation : $y^2 + 1 = \sqrt{5}.y$, qui lui donne y puis x.

3) Dans un autre problème, il traite une équation dont les coefficients et les racines sont des irrationnels plus compliqués. Il traduit le problème : « *Tu ajoutes à la racine de la moitié d'un bien trois dinârs et à la racine de son tiers deux dinârs et tu multiplies l'un par l'autre,*

[19] Voir [Dahan-Dalmedico et Peiffer 1986, pp. 72-74], [Rashed et Houzel, 2013, pp. 9-13], ou [Farès, 2017, ch.2, §2]. Voir aussi [Ver Eecke 1959, prop. I. 27, I. 28, I. 30, pp. 36-40].

ça sera vingt dirhams », en une équation que nous pouvons écrire (dans notre langage):

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}x}+3\right).\left(\sqrt{\frac{1}{3}x}+2\right)=20 .$$

En développant, il obtient: $\left(\sqrt{3x}+\sqrt{2x}\right)=14-\sqrt{\frac{1}{6}x^2}$, puis

$$(1) \qquad 5x+\sqrt{24x^2}=196+\frac{1}{6}x^2-\sqrt{\left(130+\frac{2}{3}\right).x^2} ,$$

puis,

$$\left(30+\sqrt{864}+\sqrt{4704}\right)x=x^2+1176 ,$$

qu'il résout par l'algorithme d'al-Khwārizmī correspondant à son type et donne la solution :

$$x=15+\sqrt{216}+\sqrt{1176}-\sqrt{1617+\sqrt{1058400}+\sqrt{1016064}+\sqrt{194400}-1176} .$$

Ensuite, il effectue dans (1), le changement d'inconnue $y=2x$, et il obtient une solution dont la forme est plus simple :

$$x=15+\sqrt{2400}-\sqrt{1449+\sqrt{2160000}} .$$

Notons qu'il n'écrit pas les nombres par des chiffres mais par des mots de la langue ordinaire.

Ouvrages cités

***Dans ce qui suit, les références qui sont citées en français et en arabe, ont été traduites et publiées en cette dernière langue. La liste des ouvrages cités est extraite de celle du livre [Farès, N. 2017] :** ***Naissance et développement de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe*.**

المراجع المذكورة

***في ما يلي، المراجع المذكورة بالعربيّة وبلغة أخرى، جرت ترجمتها إلى العربيّة ومتوفّرة باللغتين. واللائحة التالية مقتطعة من لائحة مراجع الكتاب [فارس، ن. ٢٠١٧].**

Anbouba, A. 1978. "L'algèbre arabe aux IXe et Xe siècles – Aperçu général". *Journal for the history of Arabic science*. Alep. Vol. 1, no. 2, pp. 66 – 100.

Ben Miled, Marwan. 1999. “Les commentaires d’Al-Māhānī et d’un anonyme, du livre X des *Eléments* dÉuclide” *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 9, no 2, Septembre.

Ben Miled, M. 2005. *Opérer sur le continu*. Académie tunisienne Beït al-Hikma, Carthage.

Dahan-Delmico, A. et Peiffer, J. 1986. *Une histoire des mathématiques – Routes et dédales,* Seuil, Paris.

Farès, N. 2009. La notion d'irrationalité selon un mathématicien du X^e siècle: Abū Ja‘far al-Khāzin. *Lebanese Science Journal*, 10 (2) ; pp. 113-123.

Farès, N. 2015. Al-Khwārizmī et le fondement analytique de l'algèbre. *Lebanese Science Journal*, Vol. 16, No. 1.

Farès, N. 2016. *Commentaire du Livre X des Éléments d’Euclide, par Abū Ja‘far al-Khāzin*. Éditions de l’Université Libanaise, Beyrouth.

فارس. ن. ٢٠١٦. رسالة أبي جعفر الخازن في تفسير الكتاب العاشر من أصول أقليدس. منشورات الجامعة اللبنانيّة–بيروت.

Farès, N. 2017. *Naissance et développement de l’algèbre dans la tradition mathématique arabe*. Dār al-Fārābī, Beyrouth.

فارس، ن. ٢٠١٧. "الجبر– ولادته وتطوّره في التقليد الرياضي العربي"، دار الفارابي، بيروت.

Al-Karajī, Abū-Bakr. (Manuscrit. S. D). *Al-Fakhri*. Köprülü, Istanbul, 950, 1.

الكرجي، (٢). "الفخري من كلام زين الدين أبو بكر محمّد الحسن الحاسب الكرجي". (مخطوط، اسطنبول السابق، بدون تاريخ).

Al-Nadīm (Ibn). Le *Fihrist* . Édition Rida Tajaddud, Dar al Masīra, Beyroyh, S.D.

ابن النديم. "كتاب الفهرست"، تحقيق رضا تجدّد، دار المسيرة، بيروت، بدون تاريخ.

Rashed, R. 2007. *Al-Khwārizmī – Le commencement de l'algèbre*, Blanchard, Paris.

راشد، ر. ٢٠١٠. "رياضيّات الخوارزمي– تأسيس علم الجبر"، ترجمة نقولا فارس (فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي)، صدر عن مركز دراسات الوحدة العربيّة، بيروت، ترجمة عن الأصل الفرنسي المذكور ([Rashed, 2007]).

Rashed, R. et Houzel, C. 2013. *Les arithmétiques de Diophante*. Walter De Gruyter GmbH, Berlin/Boston.

Ver Eecke, P. 1926. *Diophante d'Alexandrie : les six livres d'arithmétique et le livre des nombres polygones*. Blanchard, Paris.

Wœpcke, F. 1853. *Extrait du Fakhri, par Abou Bekr Mohammed Ben al Haçan al Karkhi*. Bibliothèque Impériale, Paris.

Youschkévitch, A. P. 1976. *Les mathématiques arabes (VIII^{e}-XV^{e} siècle)*, Vrin, Paris.